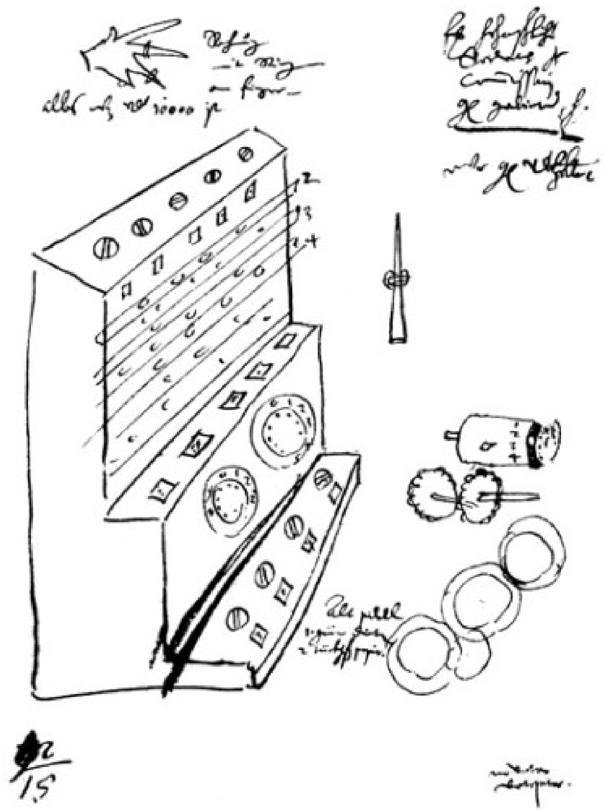
Informatica per le discipline umanistiche

Lezione 1 – modelli di calcolo

cristiano.longo@unict.it

L’orogologio calcolante di Wilhelm Schickard

Nel 1623, Wilhelm Schickard inventò un *orologio calcolante* in grado di sommare e sottrarre numeri fino a sei cifre.



Macchine calcolatrici – la *Pascalina*

La pascalina inventata nel 1642 da Blaise Pascal, da cui prese il nome, consente di sommare e sottrarre numeri composti da un massimo di dodici cifre.

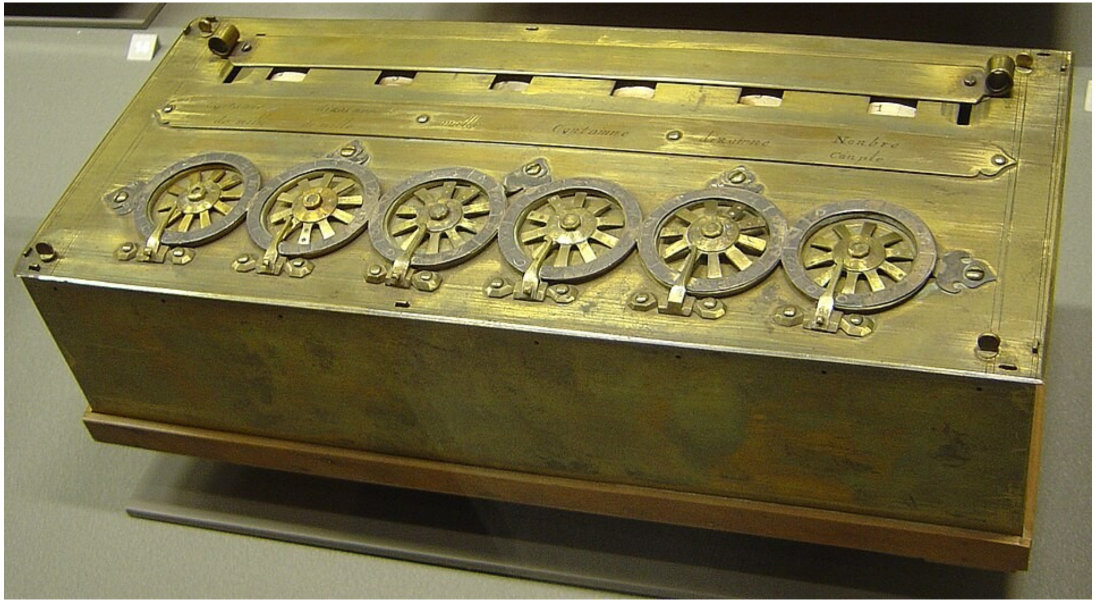
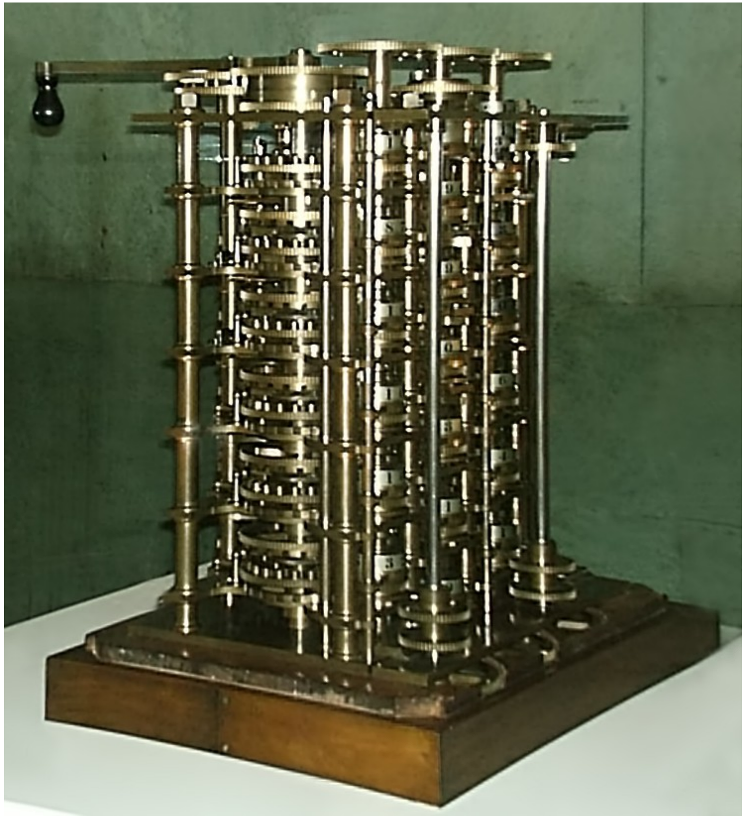


Foto di David.Monniaux, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Macchine calcolatrici – Macchina Differenziale

Nel **1822** Charles Babbage propone il progetto della **Macchina Differenziale** per il calcolo di polinomi.



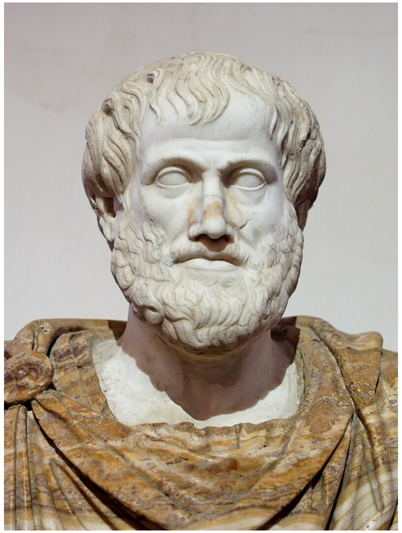
Calculemus!

Gottfried Wilhelm von Leibniz (Lipsia, 1646 – Hannover, 1716)

“[…] quando sorga una controversia, non ci sarà più necessità di discussione tra due filosofi di quella che c’è tra due calcolatori. Sarà sufficiente prendere una penna, sedersi al tavolo e dirsi l’un l’altro: ***calculemus****!”*

Dissertatio de arte combinatoria
(Leibiniz, 1666)

Il pensiero di Leibiniz ha radici nell’opera di Aristotele.



Un sillogismo ha la forma

Premesse $\longrightarrow$ Conseguenza

Un esempio di sillogismo **valido** (ossia, sempre vero) è

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Tutti i cavalli sono mammiferi}\\ \textit{Tutti i mammiferi sono vertebrati}\end{array}\right\} \longrightarrow \textit{Tutti i cavalli sono vertebrati}$$

Il programma di Leibiniz

- una **enciclopedia** che abbracciasse tutta la conoscenza umana;
- una **caratteristica universale**, ossia un insieme di simboli unico in grado di rappresentare tutta la conoscenza umana;
- un sistema di regole per la manipolazione di questi simboli, detto **calculus ratiocinator.**

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. *A* è *in L* significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A. B* $\oplus$ *N* = *L* significa che *B* è *in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L.*

Assioma 1. *B* $\oplus$ *N* = *N* $\oplus$ *B*.

Assioma 2. *A* $\oplus$ *A* = *A*.

Prop. 5. se *A* è *in B* e *A* = *C* allora *C* è *in B*.

In virtù di *A* = *C*, possiamo sostituire *C* ad *A* in *A* è *in B*.

Prop. 6. se *C* è *in B* è *A* = *B* allora *C* è *in A*.

Si dimostra analogamente a Prop.6

Prop. 7. *A* è *in A*.

Dall'assioma 3 *A* $\oplus$ *A* = *A,* la proposizione deriva da Def. 3 "*B* $\oplus$ *N* = *L* significa che *B* è *in L*" ponendo B=A, N=A ed L=A.

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. ***A è in L*** significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A*. $\boldsymbol{B \oplus N = L}$ significa che *B è in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L.*

Asserzioni: *A* è in *L;* $B \oplus N = L$

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. ***A*** è *in* ***L*** significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A*. ***B*** $\oplus$ ***N*** = ***L*** significa che *B* è *in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L.*

Asserzioni: *A* è in *L;* *B* $\oplus$ *N* = *L*

Variabili: nell'asserzione *A* è in *L* , *A* ed *L* sono simboli ai quali possiamo **sostituire** qualsiasi altro elemento nell'*universo del discorso,* ad esempio

A	è in	L
Alice	è in	classe
Roma	è in	Italia

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. *A* è *in L* significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A. B* $\oplus$ *N* = *L* significa che *B* è *in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L.*

Asserzioni: *A* è in *L;* *B* $\oplus$ *N* = *L*

Variabili: nell'asserzione *A* è in *L* , *A* ed *L* sono simboli ai quali possiamo **sostituire** qualsiasi altro elemento nell'*universo del discorso,* ad esempio

A	è in	L
Alice	è in	classe
Roma	è in	Italia

Implicazione: "*B* $\oplus$ *N* = *L* significa che *B* è in *L*" oggi si scriverebbe

$$B \oplus N = L \rightarrow B \text{ è in } L$$

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. *A* è *in* *L* significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A*. $B \oplus N = L$ significa che *B* è *in* *L* e che *B* e *N* insieme compongono *L*.

Assioma 1. $B \oplus N = N \oplus B$.

Assioma 2. $A \oplus A = A$.

Gli assiomi sono asserzioni date (assunte come vere)

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. *A è in L* significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A. B* $\oplus$ *N* = *L* significa che *B è in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L.*

Assioma 1. *B* $\oplus$ *N* = *N* $\oplus$ *B*.

Assioma 2. *A* $\oplus$ *A* = *A*.

Prop. 5. se *A è in B* e *A* = *C* allora *C è in B*.

Prop. 6. se *C è in B* è *A* = *B* allora *C è in A*.

Prop. 7. *A è in A*.

Dagli assiomi possiamo derivare altre asserzioni vere.

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. *A è in L* significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A. B* $\oplus$ *N* = *L* significa che *B è in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L.*

Assioma 1. *B* $\oplus$ *N* = *N* $\oplus$ *B*.

Assioma 2. *A* $\oplus$ *A* = *A*.

Prop. 5. se *A è in B* e *A* = *C* allora *C è in B*.

Prop. 6. se *C è in B* è *A* = *B* allora *C è in A*.

Prop. 7. *A è in A*.

Sostituzione: data una qualsiasi asserzione vera φ, se X=Y allora l'asserzione che si ottiene sostituendo ogni occorrenza di X con Y in φ è ancora vera, per qualsiasi X e Y.

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. *A* è *in L* significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A*. $B \oplus N = L$ significa che *B* è *in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L*.

Assioma 1. $B \oplus N = N \oplus B$.

Assioma 2. $A \oplus A = A$.

Prop. 5. se *A* è *in B* e $A = C$ allora *C* è *in B*.

C è in *B* si ottiene **sostituendo** *A* con *C* in *A* è *in B.*

Prop. 6. se *C* è *in B* e $A = B$ allora *C* è *in A*.

Prop. 7. *A* è *in A*.

Sostituzione: data una qualsiasi asserzione vera φ, se X=Y allora l'asserzione che si ottiene sostituendo ogni occorrenza di X con Y in φ è ancora vera, per qualsiasi X e Y.

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. *A è in L* significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A. B* $\oplus$ *N* = *L* significa che *B è in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L.*

Assioma 1. $B \oplus N = N \oplus B$.

Assioma 2. $A \oplus A = A$.

Prop. 5. se *A è in B* e *A* = *C* allora *C è in B*.

C è in *B* si ottiene sostituendo *A* con *C* in *A è in B.*

Prop. 6. se *C è in B* è *A* = *B* allora *C è in A*.

C è in *A* si ottiene sostituendo *A* con *B* in *C è in B.*

Prop. 7. *A è in A*.

Da Def.3. $B \oplus N = L \rightarrow B$ è in *L*, ponendo *B*=*A*, *N*=*A* ed *L*=*A* si ottiene

$A \oplus A = A \rightarrow A$ è in *A*

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. *A è in L* significa che *L* può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è *A*. $B \oplus N = L$ significa che *B è in L* e che *B* e *N* insieme compongono *L.*

Assioma 1. $B \oplus N = N \oplus B$.

Assioma 2. $A \oplus A = A$.

Prop. 5. se *A è in B* e $A = C$ allora *C è in B*.

C è in *B* si ottiene sostituendo *A* con *C* in *A è in B.*

Prop. 6. se *C è in B* è $A = B$ allora *C è in A*.

C è in *A* si ottiene sostituendo *A* con *B* in *C è in B.*

Prop. 7. *A è in A*.

Da Def.3. $B \oplus N = L \rightarrow B$ è in *L*, ponendo B=A, N=A ed L=A si ottiene

$A \oplus A = A \rightarrow A$ è in *A* ma $A \oplus A = A$ è vero in virtà dell'Assioma 2,

Calculus Ratiocinator - esempio

Def. 3. A è *in* L significa che L può essere fatto concidere con una pluralità di termini uno dei quali è A. $B \oplus N = L$ significa che B è *in* L e che B e N insieme compongono L.

Assioma 1. $B \oplus N = N \oplus B$.

Assioma 2. $A \oplus A = A$.

Prop. 5. se A è *in* B e $A = C$ allora C è *in* B.

C è in B si ottiene sostituendo A con C in A è *in* B.

Prop. 6. se C è *in* B è $A = B$ allora C è *in* A.

C è in A si ottiene sostituendo A con B in C è *in* B.

Prop. 7. A è *in* A.

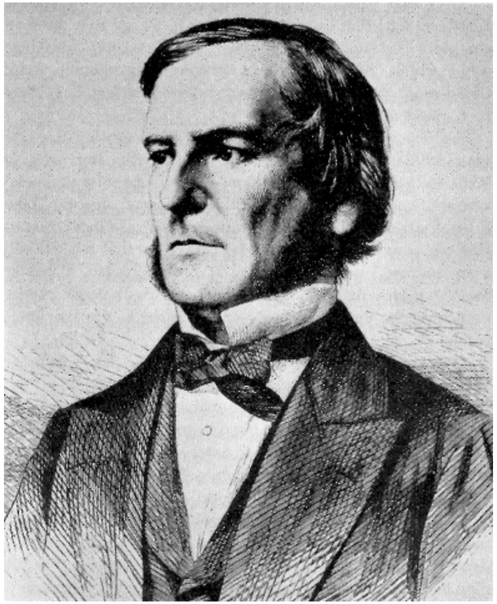
Da Def.3. $B \oplus N = L \rightarrow B$ è in L, ponendo B=A, N=A ed L=A si ottiene

$A \oplus A = A \rightarrow A$ è in A ma $A \oplus A = A$ è vero in virtù dell'Assioma 2, per cui A è in A

Algebra Booleana

Un esempio di sistema formale di deduzione è dovuto a George Boole,

"An investigation of the laws of thought", 1854



Algebra Booleana - Sintassi

Dato un insieme di **variabili** *x, y, z, p, q, r, s, t, ...*

Algebra Booleana - Sintassi

Dato un insieme di **variabili** *x, y, z, p, q, r, s, t, ...*

L'insieme delle **formule** dell'algebra booleana si definisce come segue.

- Data una qualsiasi variabile *v*, *v* è una formula.
- Se φ è una formula, allora anche $\neg(\varphi)$ è una formula.
- Se φ e ψ sono due formule, allora anche $(\varphi)\wedge(\psi)$ è una formula.
- Se φ e ψ sono due formule, allora anche $(\varphi)\vee(\psi)$ è una formula.

Algebra Booleana - Sintassi

Dato un insieme di **variabili** *x, y, z, p, q, r, s, t, ...*

L’insieme delle **formule** dell’algebra booleana si definisce come segue.

- Data una qualsiasi variabile *v*, *v* è una formula.
- Se φ è una formula, allora anche ¬(φ) è una formula.
- Se φ e ψ sono due formule, allora anche (φ)∧(ψ) è una formula.
- Se φ e ψ sono due formule, allora anche (φ)∨(ψ) è una formula.

Esempi di formule

x $\neg(x)$ $\neg(x)\wedge(y)$ $\neg(\neg(x)\wedge(y))$ $\neg(\neg(x)\wedge(y))\vee(z)$

Algebra Booleana - Sintassi

Dato un insieme di **variabili** *x, y, z, p, q, r, s, t, ...*

L'insieme delle **formule** dell'algebra booleana si definisce come segue.

- Data una qualsiasi variabile *v*, *v* è una formula.
- Se φ è una formula, allora anche ¬(φ) è una formula.
- Se φ e ψ sono due formule, allora anche (φ)∧(ψ) è una formula.
- Se φ e ψ sono due formule, allora anche (φ)∨(ψ) è una formula.

Esempi di formule (omettiamo le parentesi sulle variabili e la negazione di variabili)

$x \quad \neg x \quad \neg x \wedge y \quad \neg(\neg x \wedge y) \quad \neg(\neg x \wedge y) \vee z$

Algebra Booleana - Esempi

Dato un insieme di **variabili** $x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots$

L'insieme delle **formule** dell'algebra booleana si definisce come segue.

- Data una qualsiasi variabile v, v è una formula.
- Se φ è una formula, allora anche $\neg(\varphi)$ è una formula.
- Se φ e ψ sono due formule, allora anche $(\varphi)\wedge(\psi)$ è una formula.
- Se φ e ψ sono due formule, allora anche $(\varphi)\vee(\psi)$ è una formula.

Esempi di formule (omettiamo le parentesi sulle variabili e la negazione di variabili)

$x, y, z, p, \ldots$

$\neg x, \neg y, \neg z, \neg p, \ldots$

$x\wedge y,\ x\wedge z,\ y\wedge z,\ x\wedge\neg y,\ (x\wedge y)\wedge(x\wedge y),\ \neg z\wedge(y\wedge z),$

$x\vee y,\ x\vee z,\ x\vee\neg y,\ p\vee(\neg z\wedge(y\wedge z))$ *Esempi di NON formule* $xyz,\ \neg\wedge,\ \wedge\wedge y$

Algebra Booleana - Semantica

Un **assegnamento** associa ad ogni variabile un **valore di verità**, che può essere V oppure F.

Esempio di assegnamento a

$a(x)$=V $a(y)$=V $a(z)$=F $a(p)$=V $a(q)$=F $a(r)$=F $a(s)$=V $a(t)$=F   ….

Algebra Booleana - Semantica

Un **assegnamento** associa ad ogni variabile un **valore di verità**, che può essere V oppure F.

Un assegnamento *a* si estende alle formule come segue (φ e ψ sono due formule)

Premessa	*Conseguenza*
$a(\varphi)$	$a(\neg\varphi)$
V	F
F	V

Premesse		Conseguenza
$a(\varphi)$	$a(\psi)$	$a(\varphi \wedge \psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Premesse		Conseguenza
$a(\varphi)$	$a(\psi)$	$a(\varphi \vee \psi)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Algebra Booleana - Semantica

Un **assegnamento** associa ad ogni variabile un **valore di verità**, che può essere V oppure F.

Un assegnamento *a* si estende alle formule come segue (φ e ψ sono due formule)

Premessa	*Conseguenza*
$a(\varphi)$	$a(\neg\varphi)$
V	F
F	V

Premesse		Conseguenza
$a(\varphi)$	$a(\psi)$	$a(\varphi \wedge \psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Premesse		Conseguenza
$a(\varphi)$	$a(\psi)$	$a(\varphi \vee \psi)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio: sia $a(x)$=V, $a(y)$=V e $a(z)$=F

$a(\neg x)=?$ $a(\neg x \wedge y)=?$ $a(\neg(\neg x \wedge y))=?$ $a(\neg(\neg x \wedge y) \vee z)=?$

Algebra Booleana - Semantica

Un **assegnamento** associa ad ogni variabile un **valore di verità**, che può essere V oppure F.

Un assegnamento *a* si estende alle formule come segue (φ e ψ sono due formule)

Premessa	*Conseguenza*
$a(\varphi)$	$a(\neg\varphi)$
V	**F**
F	V

Premesse		Conseguenza
$a(\varphi)$	$a(\psi)$	$a(\varphi\wedge\psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Premesse		Conseguenza
$a(\varphi)$	$a(\psi)$	$a(\varphi\vee\psi)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio: sia $\boldsymbol{a(x)}$**=V**, $a(y)$=V e $a(z)$=F

$a(\neg x)$=**F** $a(\neg x\wedge y)=?$ $a(\neg(\neg x\wedge y))=?$ $a(\neg(\neg x\wedge y)\vee z)=?$

Algebra Booleana - Semantica

Un **assegnamento** associa ad ogni variabile un **valore di verità**, che può essere V oppure F.

Un assegnamento *a* si estende alle formule come segue (φ e ψ sono due formule)

Premessa	*Conseguenza*
$a(\varphi)$	$a(\neg\varphi)$
V	F
F	V

Premesse		Conseguenza
$a(\varphi)$	$a(\psi)$	$a(\varphi\wedge\psi)$
V	V	V
V	F	F
F	**V**	**F**
F	F	F

Premesse		Conseguenza
$a(\varphi)$	$a(\psi)$	$a(\varphi\vee\psi)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio: sia $a(x)$=V, $a(y)$=V e $a(z)$=F

$a(\neg x)$=F **$a(\neg x\wedge y)$=F** $a(\neg(\neg x\wedge y))$=? $a(\neg(\neg x\wedge y)\vee z)$=?

Algebra Booleana - Semantica

Un **assegnamento** associa ad ogni variabile un **valore di verità**, che può essere V oppure F.

Un assegnamento *a* si estende alle formule come segue (φ e ψ sono due formule)

Premessa	*Conseguenza*
a(φ)	*a*(¬φ)
V	F
F	**V**

Premesse		Conseguenza
a(φ)	*a*(ψ)	*a*(φ∧ψ)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Premesse		Conseguenza
a(φ)	*a*(ψ)	*a*(φ∨ψ)
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio: sia $a(x)$=V, $a(y)$=V e $a(z)$=F

$a(\neg x)$=F $a(\neg x \wedge y)$=F   **$a(\neg(\neg x \wedge y))$=V** $a(\neg(\neg x \wedge y) \vee z)$=?

Algebra Booleana - Semantica

Un **assegnamento** associa ad ogni variabile un **valore di verità**, che può essere V oppure F.

Un assegnamento *a* si estende alle formule come segue (φ e ψ sono due formule)

Premessa	*Conseguenza*
a(φ)	*a*(¬φ)
V	F
F	V

Premesse		Conseguenza
a(φ)	*a*(ψ)	*a*(φ∧ψ)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Premesse		Conseguenza
a(φ)	*a*(ψ)	*a*(φ∨ψ)
V	V	V
V	**F**	**V**
F	V	V
F	F	F

Esempio: sia *a*(*x*)=V, *a*(*y*)=V e *a*(*z*)=F

a(¬x)=F *a*(¬*x*∧*y*)=F *a*(¬(¬*x*∧*y*))=V ***a*(¬(¬*x*∧*y*)∨*z*)=V**

Algebra Booleana come calcolo simbolico

Un piccolo abuso di notazione ci permette di automatizzare il processo.

Estendiamo la definizione dell'insieme delle formule con le **costanti** V ed F, distinte dalle variabili.

In questo modo, anche le seguenti sono formule dell'algebra Booleana

$$V,\ F,\ \neg V,\ \neg F,\ V \wedge V,\ V \wedge F,\ F \wedge F,\ V \vee F,\ F \vee F,\ \ldots$$

Le regole contenute nelle tabelle viste prima possono essere riscritte come equivalenze.

$\neg V=F$
$\neg F=V$
$V \wedge V=V$
$V \wedge F=F$
$F \wedge V=F$
$F \wedge F=F$
$V \vee V=V$
$V \vee F=V$
$F \vee V=V$
$F \vee F=F$

Procedimento per la risoluzione

Data una formula dell'algebra Booleana ed un assegnamento *a*, per calcolare *a*(φ):

1) sostituire in φ ogni variabile *v* con *a*(*v*);

Esempio: sia *a*(*x*)=V, *a*(*y*)=V e *a*(*z*)=F

$a(\neg(\neg \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{z}) = \neg(\neg \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) \vee \mathbf{F}$

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Procedimento per la risoluzione

Data una formula dell'algebra Booleana ed un assegnamento *a*, per calcolare $a(\varphi)$:

1) sostituire in φ ogni variabile *v* con $a(v)$;
2) Applicare *iterativamente* le sostituzioni derivanti dalle equivalenze.

Esempio: sia $a(x)$=V, $a(y)$=V e $a(z)$=F

$a(\neg(\neg x \wedge y) \vee z) = \neg(\mathbf{\neg V} \wedge V) \vee F =$

$\neg(\mathbf{F} \wedge V) \vee F =$

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Procedimento per la risoluzione

Data una formula dell'algebra Booleana ed un assegnamento *a*, per calcolare *a*(φ):

1) sostituire in φ ogni variabile *v* con *a*(*v*);
2) Applicare *iterativamente* le sostituzioni derivanti dalle equivalenze.

Esempio: sia $a(x)$=V, $a(y)$=V e $a(z)$=F

$a(\neg(\neg x\wedge y)\vee z)=\neg(\neg V\wedge V)\vee F=$

$\neg(\mathbf{F\wedge V})\vee F=$

$\neg\mathbf{F}\vee F$

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Procedimento per la risoluzione

Data una formula dell'algebra Booleana ed un assegnamento *a*, per calcolare $a(\varphi)$:

1) sostituire in φ ogni variabile v con $a(v)$;
2) Applicare *iterativamente* le sostituzioni derivanti dalle equivalenze.

Esempio: sia $a(x)$=V, $a(y)$=V e $a(z)$=F

$a(\neg(\neg x \wedge y) \vee z) = \neg(\neg V \wedge V) \vee F =$

$\neg(F \wedge V) \vee F =$

¬F$\vee F =$

V$\vee F$

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Procedimento per la risoluzione

Data una formula dell'algebra Booleana ed un assegnamento *a*, per calcolare $a(\varphi)$:

1) sostituire in φ ogni variabile *v* con $a(v)$;
2) Applicare *iterativamente* le sostituzioni derivanti dalle equivalenze.

Esempio: sia $a(x)=V$, $a(y)=V$ e $a(z)=F$

$a(\neg(\neg x \wedge y) \vee z) = \neg(\neg V \wedge V) \vee F =$

$\neg(F \wedge V) \vee F =$

$\neg F \vee F =$

$\mathbf{V \vee F} =$

$\mathbf{V}$

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Tautologie

Alcune formule assumono valore di verità V per ogni possibile assegnamento. In tal caso le formule di dicono **valide**. Le formule valide sono dette **tautologie**.

Esempio banale: $x \vee \neg x$

Dimostrazione: per $a(x)$=V, $a(x \vee \neg x)$=V∨¬V=V∨F=V.

per $a(x)$=F, $a(x \vee \neg x)$=F∨¬F=F∨V=V.

Prima legge di De Morgan:

$$(\neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee (\neg(\neg(x \wedge y)) \wedge \neg(\neg x \vee \neg y))$$

Dimostrazione: per esercizio

Esercizio: legge di De Morgan

Prima legge di De Morgan:

$$(\neg(x\wedge y) \wedge (\neg x\vee\neg y)) \vee (\neg(\neg(x\wedge y)) \wedge \neg(\neg x\vee\neg y))$$

a1(x)=V, a1(y)=V ; a2(x)=V, a2(y)=F ; a3(x)=F, a3(y)=V ; a4(x)=F, a4(y)=F

a1((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))=V

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Esercizio: legge di De Morgan

Prima legge di De Morgan:

$$(\neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee (\neg(\neg(x \wedge y)) \wedge \neg(\neg x \vee \neg y))$$

a1(x)=V, a1(y)=V ; **a2(x)=V, a2(y)=F** ; a3(x)=F, a3(y)=V ; a4(x)=F, a4(y)=F

a1((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))=V

a2((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))=
(¬(V∧F) ∧ (¬V∨¬F)) ∨ (¬(¬(V∧F)) ∧ ¬(¬V∨¬F))=
(¬F ∧ (F∨V)) ∨ (¬(¬F) ∧ ¬(F∨V))=
(V ∧ V) ∨ (¬V ∧ ¬V)=
V ∨ (F ∧ F)=
V ∨ F =
V

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Esercizio: legge di De Morgan

Prima legge di De Morgan:

$$(\neg(x\wedge y) \wedge (\neg x\vee\neg y)) \vee (\neg(\neg(x\wedge y)) \wedge \neg(\neg x\vee\neg y))$$

a1(x)=V, a1(y)=V ; a2(x)=V, a2(y)=F ; **a3(x)=F, a3(y)=V** ; a4(x)=F, a4(y)=F

a1((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))=V

a2((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))= V

a3((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))=
(¬(F∧V) ∧ (¬F∨¬V)) ∨ (¬(¬(F∧V)) ∧ ¬(¬F∨¬V))=
(¬F ∧ (V∨F)) ∨ (¬(¬F) ∧ ¬(V∨F))=
(V ∧ V) ∨ (¬V ∧ ¬V)=
V ∨ (F ∧ F)=
V ∨ F=
V

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Esercizio: legge di De Morgan

Prima legge di De Morgan:

$$(\neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee (\neg(\neg(x \wedge y)) \wedge \neg(\neg x \vee \neg y))$$

a1(x)=V, a1(y)=V ; a2(x)=V, a2(y)=F ; a3(x)=F, a3(y)=V ; **a4(x)=F, a4(y)=F**

a1((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))=V

a2((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))= V

a3((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))=V

a4((¬(x∧y) ∧ (¬x∨¬y)) ∨ (¬(¬(x∧y)) ∧ ¬(¬x∨¬y)))=
(¬(F∧F) ∧ (¬F∨¬F)) ∨ (¬(¬(F∧F)) ∧ ¬(¬F∨¬F))=
(¬F ∧ (V∨V)) ∨ (¬(¬F) ∧ ¬(V∨V))=
(V ∧ V) ∨ (¬V ∧ ¬V)=
V ∨ (F ∧ F)=
V ∨ F =
V

¬V=F
¬F=V
V∧V=V
V∧F=F
F∧V=F
F∧F=F
V∨V=V
V∨F=V
F∨V=V
F∨F=F

Contraddizioni

Le formule assumono sempre valore di verità F per ogni possibile assegnamento sono dette **contraddizioni**.

Sillogismi

L'algebra di Boole non è adatta ad esprimere sillogismi (nel senso Aristotelico).
Essi infatti presentano asserzioni come

- tutti i cavalli sono mammiferi,
- esistono cavalli purosangue.

Sillogismi

L’algebra di Boole non è adatta ad esprimere sillogismi (nel senso Aristotelico). Essi infatti presentano asserzioni come

- tutti i cavalli sono mammiferi,
- esistono cavalli purosangue.

Un esempio di sillogismo **valido** è

Tutti i cavalli sono mammiferi
Tutti i mammiferi sono vertebrati → *Tutti i cavalli sono vertebrati*

Sillogismi

L’algebra di Boole non è adatta ad esprimere sillogismi (nel senso Aristotelico). Essi infatti presentano asserzioni come

- tutti i cavalli sono mammiferi,
- esistono cavalli purosangue.

Bisognerà aspettare l’*ideografia* di Frege nel 1879.

Un esempio di sillogismo **valido** è

Tutti i cavalli sono mammiferi
Tutti i mammiferi sono vertebrati

$\longrightarrow$ *Tutti i cavalli sono vertebrati*